Transmission d'information et "criticalité" dans le processus de contact.

en collaboration avec Marzio Cassandro et Antonio Galves

Criticalité - est-ce important ?

- Comment est-ce qu'un système complexe **transmet** l'information et dans quel régime du système cette transmission se passe-t-elle de manière la plus efficace ?

Criticalité - est-ce important ?

• Comment est-ce qu'un système complexe **transmet** l'information et dans quel régime du système cette transmission se passe-t-elle de manière la plus efficace ?

• Est-ce **au point critique** ?

• Vanni, Luković et Grigolini (2011) : In bird flocks "the information transfer is made possible by the nonlocal nature of the criticality condition."

• Aussi : Cavagna et al (2010) : "flocks behave as critical systems, poised to respond maximally to environmental perturbations."

En neuroscience :

• Beggs et Plenz (2003) : "*The fact that the critical state [...] maximised information transmission in these networks is consistent with an intuitive understanding of how a branching process would work in the context of a highly parallel network. If the network were subcritical, an input signal would attenuate, causing most output units to be inactive, thus leaving little evidence of the input. If the network were supercritical, any input signal would eventually lead to most output units being active, again leaving little information as to what the input was.*"

• Per Bak (1996) "*The brain must operate at the critical case where the information is just able to propagate.*"

- Beaucoup d'études numériques....

- Par exemple : *Kinouchi et Copelli* (2006). Optimal dynamical range of excitable networks at criticality.

et bien d'autres....

• Beaucoup d'études numériques....

• Par exemple : *Kinouchi et Copelli* (2006). Optimal dynamical range of excitable networks at criticality.
et bien d'autres.... Mais pas de travail analytique.

• Notre but au début était d'étudier ce problème dans un modèle de neurones en interactions bien connu .... Difficile !

• En attendant, je parlerai de cette question dans un **modèle simplifié** : Le processus de contact.

- Mesure pour la transmission de l'information : **Sensitivité** du processus **par rapport à un stimulus initial**.

- Cette sensitivité n'est pas maximisée au point critique du système, **mais après**.

Remarque

Les maths que nous utilisons reposent avant tout sur le fait que le processus de contact est auto-dual ! et que l'on connaît bien le comportement en temps long ainsi que les propriétés de décorrélation de la mesure invariante.
Une approche mathématique rigoureuse dans un modèle plus complexe et plus réaliste pour les réseaux de neurones semble difficile - sauf dans une limite champs-moyen de processus de Hawkes linéaires avec période refractaire (où on peut tout calculer dans le modèle limite : Chevallier 2017).

Le processus de contact

- espace d'états : $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$
- configurations $\xi = (\xi(i))_{i\in\mathbb{Z}}$, $\xi(i) \in \{0,1\}$
- Processus de contact : $(\eta_t^\lambda(i), i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}_+)$ avec générateur

$$Lf(\xi) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} c(i,\xi)[f(\xi^i) - f(\xi)],$$

avec

$$\begin{aligned} \xi^i(j) &= \xi(j), \text{ pour tout } j \neq i, \\ \xi^i(i) &= 1 - \xi(i), \end{aligned}$$

et

$$c(i,\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \xi(i) = 1 \\ \lambda \sum_{j=i\pm 1} \xi(j) & \text{si } \xi(i) = 0 \end{array} \right\}.$$

- Notons $(\eta_t^{\lambda,\xi}, t \geq 0)$ le processus qui part de $\eta_0^{\lambda,\xi} = \xi \in X$.
- Harris (1974) : Il existe une valeur critique $0 < \lambda_c < \infty$ avec :

$-$ pour tout $\lambda \leq \lambda_c$, il n'existe qu'une seule mesure invariante, δ_0 : c'est le cas de l'extinction.

$-$ pour $\lambda > \lambda_c$, une deuxième mesure invariante non-triviale existe.

• Notons $(\eta_t^{\lambda,\xi}, t \geq 0)$ le processus qui part de $\eta_0^{\lambda,\xi} = \xi \in X$.

• Harris (1974) : Il existe une valeur critique $0 < \lambda_c < \infty$ avec :
$-$ pour tout $\lambda \leq \lambda_c$, il n'existe qu'une seule mesure invariante, δ_0 : c'est le cas de l'extinction.
$-$ pour $\lambda > \lambda_c$, une deuxième mesure invariante non-triviale existe.

• Mesure de la sensitivité par rapport à la configuration initiale :
On expose le système à un stimulus d'intensité p à l'intérieur d'un ensemble fini $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ au temps $t = 0$:

$$\xi(i), i \in \Lambda, \text{ i.i.d. Bernoulli } (p), \ \xi(i) = 0 \text{ en dehors de } \Lambda.$$

$\longrightarrow$ processus qui part de cette configuration initiale sera notée $(\eta_t^{\lambda,p,\Lambda}, t \geq 0)$.

Soient $p < q$ deux intensités initiales.
On pose

$$\mathcal{S}(\lambda) := \inf_{\mathbb{P}\in\Pi} \mathbb{E}(|\eta_t^{\lambda,p,\Lambda}(0)) - \eta_t^{\lambda,q,\Lambda}(0))|)$$

− Π = ensemble de tous les couplages $\mathbb{P}$ de $\eta_t^{\lambda,p,\Lambda}(0)$ et de $\eta_t^{\lambda,q,\Lambda}(0)$.

− $\mathcal{S}(\lambda)$ mesure la distance minimale des deux processus, dans une position donnée (l'origine 0) au temps t.

Théorème

Pour $q > p > \frac{1}{2}$*, et pour* $\Lambda = \{-r, r\}$*, il existe* $\lambda_1 > \lambda_c$*, tel que :*

$$\lambda \mapsto \mathcal{S}(\lambda) \text{ croissant sur }]0, \lambda_1[, \text{ décroissant seulement après.}$$

Remarque

Notre critère n'est donc pas maximisé pour le système critique, mais dans le régime surcritique $\Longrightarrow$ *à comparer avec le résultat (numérique) de Erten et al. (2017), Criticality and Information Dynamics in Epidemiological Models : Modèle de type SIS pour une épidemie.*

Notre mesure de sensitivité

Deux points de vue possibles en neurosciences :
– on impose un stimulus extérieur de manière **permanente** au système (comme un champ extérieur). E.g. Kinouchi et Copelli (2006) (simulations), Julien Chevallier (2017) (résultat analytique dans une limite de champ moyen pour des processus de Hawkes).

– un stimulus venant d'une autre région du cerveau est initialement exposé au système. **Comment est-ce que ce stimulus est propagé par le système ?**

Notre mesure de sensitivité

Deux points de vue possibles en neurosciences :
– on impose un stimulus extérieur de manière **permanente** au système (comme un champ extérieur). E.g. Kinouchi et Copelli (2006) (simulations), Julien Chevallier (2017) (résultat analytique dans une limite de champ moyen pour des processus de Hawkes).

– un stimulus venant d'une autre région du cerveau est initialement exposé au système. **Comment est-ce que ce stimulus est propagé par le système ?** Ceci est notre point de vue.

Quelques mots sur la preuve

– Le processus de contact est **auto-dual :** En identifiant configurations et sous-ensembles de Z, nous avons : (Bertein et Galves (1977))

$$\mathbb{P}[\eta_t^{\lambda,\xi} \cap A \neq \emptyset] = \mathbb{P}[\eta_t^{\lambda,A} \cap \xi \neq \emptyset].$$

– Couplage maximal et auto-dualité $\Longrightarrow$ pour $\xi(i), \xi'(i), i \in \Lambda$, i.i.d. Bernoulli de paramètres p et q, nous avons

$$\inf_{\mathbb{P} \in \Pi} \mathbb{E}(|\eta_t^{\lambda,\xi}(0) - \eta_t^{\lambda,\xi'}(0)|) = \mathbb{E}\left[(1-p)^{|\eta_t^{\lambda,0} \cap \Lambda|} - (1-q)^{|\eta_t^{\lambda,0} \cap \Lambda|}\right],$$

où $\Pi =$ tous les couplages des deux évolutions.

On doit donc étudier

$$\lambda \mapsto \mathbb{E}\left[(1-p)^{|\eta_t^{\lambda,0}\cap\Lambda|} - (1-q)^{|\eta_t^{\lambda,0}\cap\Lambda|}\right] =: \mathbb{E}f(|\eta_t^{\lambda,0}\cap\Lambda|),$$

$f(x) = (1-p)^x - (1-q)^x$.
$-$ f est strictement décroissante sur $[1,\infty[$ (et on peut contrôler les accroissements négatifs)

$-$ $\lambda \mapsto |\eta_t^{\lambda,0}\cap\Lambda|$ est croissant (dans le sens du couplage).

On doit donc étudier

$$\lambda \mapsto \mathbb{E}\left[(1-p)^{|\eta_t^{\lambda,0}\cap\Lambda|} - (1-q)^{|\eta_t^{\lambda,0}\cap\Lambda|}\right] =: \mathbb{E}f(|\eta_t^{\lambda,0}\cap\Lambda|),$$

$f(x) = (1-p)^x - (1-q)^x$.
$-$ f est strictement décroissante sur $[1,\infty[$ (et on peut contrôler les accroissements négatifs)

$-$ $\lambda \mapsto |\eta_t^{\lambda,0}\cap\Lambda|$ est croissant (dans le sens du couplage).

Ceci implique le résultat dans le régime surcritique pour $\lambda >> \lambda_c$.

• Le cas sous-critique est plus délicat : en fait, si f est strictement décroissante sur $[1, \infty[$, elle vaut 0 en 0 : cas de l'extinction, et f **est donc croissante entre** 0 **et** 1.

• Il faut donc montrer que ce cas **"l'emporte" sur la décroissance à partir de** $x = 1$: si le processus a survécu jusqu'au temps t, alors il est très probablement de petit cardinal, autrement dit, des petites valeurs de x sont plus probables que des grandes.

• Peut être rendu rigoureux.... ! Mais cela implique que dans notre résultat, il y a un trou : il existent $\lambda_c < \lambda_1 < \lambda_2$, tels que : $\mathcal{S}(\lambda)$ est croissant sur $]0, \lambda_1[$ et décroissant sur $]\lambda_2, \infty[$. Est-ce que $\lambda_1 = \lambda_2$? ? ?

L'exposé est basé sur l'article

- Cassandro, Marzio, Galves, Antonio, Löcherbach, E. : Information Transmission and Criticality in the Contact Process. JSP 2017. Aussi sur ArXiv.

Merci pour votre attention !